数理解析研究所講究録
第 1722 巻 2010 年 1-8

特殊線形リー環から現れる放物型概均質ベクトル空間の基本定理について
(Fundamental theorem for prehomogeneous vector spaces of parabolic type arising from special linear Lie algebras)

杉山 和成 (Kazunari Sugiyama)
千葉工業大学数学教室 (Chiba Institute of Technology)
email: skazu@sky.it-chiba.ac.jp

1 序

概均質ベクトル空間の基本定理とは，相対不変式の複素べきのフーリエ変換が再び（双対概均質ベクトル空間の）相対不変式の複素べきになる，という主張であり，この基本定理をもとに概均質ベクトル空間のゼータ関数の関数等式が証明される．本稿では，特殊線形リー環から現れる放物型概均質ベクトル空間に対する基本定理について考察する．基本定理は，関数等式が存在することは示すが，その関数等式が具体的にどのような形をしているかは個々の例に応じて計算しなければならない．さて一方，放物型概均質ベクトル空間とは，次のようなものである (Rubenthaler [4])．一般に，$\mathbb{G}$ を半単純代数群で，そのリー環 $\mathfrak{g}$ に次数 $\mathfrak{g}=\bigoplus_k \mathfrak{g}_k$ がついているとする．$\mathbb{G}_0$ を $\mathfrak{g}_0$ に対応する $\mathbb{G}$ の連結な部分代数群とすると，$\mathbb{G}_0$ は各 $\mathfrak{g}_k$ に随伴表現により作用する．このとき，$\mathfrak{g}_k$ $(k\neq 0)$ は有限個の $\mathbb{G}_0$-軌道に分かれ，特に概均質ベクトル空間である．$(\mathbb{G}_0, \mathfrak{g}_k)$ は別の群 $\mathbb{G}'$ での $((\mathbb{G}')_0, (\mathfrak{g}')_1)$ と同型になる．$(\mathbb{G}_0, \mathfrak{g}_1)$ を放物型概均質ベクトル空間という．また，$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$ となるとき，可換放物型概均質ベクトル空間という．可換放物型の正則概均質ベクトル空間については，フーリエ変換の明示的な形が計算されており，表現論との関連も調べられている．本稿では，非可換な場合についての計算例を一つ与える．この計算方法は，特殊線形リー環から現れる放物型正則概均質ベクトル空間のフーリエ変換についてはすべての場合について適用できる．しかしながら，このクラスに含まれる空間の数は膨大であり，計算結果の統一的な記述がのぞまれる．

2 可換な場合

はじめに，可換な場合の計算について復習する．$\mathbb{G}=SL_{2n}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C})$ として，$\mathfrak{g}$ の次数づけ $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$ を

$$\mathfrak{g}=\left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 \\ \hline \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}n \\ \}n \end{array}$$

により与える．このとき，放物型概均質ベクトル空間 $(\mathbb{G}_0, \mathfrak{g}_1)$ は，次のように与えられる．

$$(\mathbb{G}_0, \mathfrak{g}_1)\cong (GL_n(\mathbb{C})\times SL_n(\mathbb{C}), M_n(\mathbb{C}))$$

であり，作用は $g=(g_1,g_2)\in\mathbb{G}_0$, $x\in\mathfrak{g}_1$ に対して，

$$g\cdot x=g_1xg_2^{-1}$$

で与えられる．以後，通常の記号通り，$G:=\mathbb{G}_0, V:=\mathfrak{g}_1$ とかく．$P(x)=\det x$, $S=\{x\in V\ ;\ P(x)=0\}$ とおけば，$V-S=G\cdot I_n$ であるから，(G,V) は正則概均質ベクトル空間である．$\langle x,y\rangle=\mathrm{tr}\,{}^txy$ により V と V^* を同一視すると，$P^*=P$ となる．

数学の歩み [5] にしたがって，$|P(x)|^s=|\det x|^s$ のフーリエ変換を計算してみる．$G_{\mathbb{R}}^+$ を $G_{\mathbb{R}}$ の単位連結成分とし，

$$V_1=\{x\in V_{\mathbb{R}}\ ;\ P(x)>0\},\qquad V_2=\{x\in V_{\mathbb{R}}\ ;\ P(x)<0\}$$

とおくと，$V_{\mathbb{R}}-S_{\mathbb{R}}=V_1\cup V_2$ が $G_{\mathbb{R}}^+$-軌道分解である．$b(s)$ を $P(x)=\det x$ の b-関数，すなわち

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)P(x)^{s+1}=b(s)P(x)^s$$

をみたす s の多項式とする．このとき，$b(s)=\prod_{i=1}^n(s+i)$ となることが知られている．そして，$\gamma(s)=\prod_{i=1}^n\Gamma(s+i)$ とおく．また，$\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ を $V_{\mathbb{R}}$ 上の急減少関数の作る空間として，$f\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対してフーリエ変換 $\widehat{f}$ を

$$\widehat{f}(y)=\int_{V_{\mathbb{R}}}f(x)\exp(2\pi\sqrt{-1}\,\langle x,y\rangle)dx$$

により定める．このとき，概均質ベクトル空間の基本定理（Sato–Shintani [6], [7]）より

(2.1)
$$\int_{V_i}|\det y|^{s-n}\cdot\widehat{f}(y)dy=\gamma(s-n)\sum_{j=1}^{2}(2\pi)^{-ns}\cdot e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}ns}\cdot\varepsilon_{ij}(s)t_{ij}(s)\int_{V_j}|\det x|^{-s}f(x)dx$$

という等式が成立する．但し，$\varepsilon_{ij}(s)$ は

$$\left(\varepsilon_{ij}(s)\right)=\begin{pmatrix}1 & e^{-\pi\sqrt{-1}s}\\ e^{-\pi\sqrt{-1}s} & 1\end{pmatrix}$$

であり，$t_{ij}(s)$ は $e^{-2\pi\sqrt{-1}s}$ の多項式である．したがって，$t_{ij}(s)$ の具体形を求めれば，フーリエ変換の具体形がわかったということになる．

さて，$\varepsilon_0=\mathrm{diag}(-1,1,\dots,1)$ とおけば，

$$\varepsilon_0V_1=V_2,\qquad\varepsilon_0V_2=V_1 \tag{2.2}$$

で，$f_{\varepsilon_0}(x)=f(\varepsilon_0x)$ とすると，

$$\widehat{f_{\varepsilon_0}}(y)=\int_{V_{\mathbb{R}}}f(\varepsilon_0x)e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x,y\rangle}dx=\left(\widehat{f}\right)_{\varepsilon_0}(y)$$

であり，さらに，

$$F_1(s,f_{\varepsilon_0})=\frac{1}{\gamma(s)}\int_{V_1}|\det x|^sf(\varepsilon_0x)dx=\frac{1}{\gamma(s)}\int_{V_2}|\det x|^sf(x)dx=F_2(s,f).$$

同様に，$F_2(s, f_{\varepsilon_0}) = F_1(s, f)$ である．したがって，$c_{ij}(s) = (2\pi)^{-ns} \cdot e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}s} \cdot \varepsilon_{ij}(s) t_{ij}(s)$, $C(s) = (c_{ij}(s))$ とおくと，

$$C(s)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C(s)$$

となるので，$c_{11}(s) = c_{22}(s)$ および $c_{12}(s) = c_{21}(s)$ となることが分かる．これより，$t_{11}(s) = t_{22}(s)$ および $t_{12}(s) = t_{21}(s)$ も分かる．

一方で，$\det x$ について

$$\int_{M_n(\mathbb{R})} |\det x|^s e^{-\pi \operatorname{tr} {}^t xx} dx = \pi^{\frac{-ns}{2}} \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma((s+j)/2)}{\Gamma(j/2)} \tag{2.3}$$

が成り立つことは良く知られている．そうすると，$s \mapsto s - n$ として

$$\int_{V_i} |\det y|^{s-n} e^{-\pi \operatorname{tr} {}^t yy} dy = \frac{1}{2} \cdot \pi^{\frac{n^2}{2} - \frac{sn}{2}} \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma((s-j)/2)}{\Gamma((j+1)/2)}$$

となる．$\frac{1}{2}$ は $\int_{M_n(\mathbb{R})} = \int_{V_1} + \int_{V_2}$ ということから来る．$\widehat{e^{-\pi \operatorname{tr} {}^t yy}} = e^{-\pi \operatorname{tr} {}^t yy}$ に注意すると，(2.1) から

$$\pi^{\frac{n^2}{2} - \frac{ns}{2}} \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{s-j}{2}\right) = \pi^{\frac{ns}{2}} \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{-s+j+1}{2}\right) \gamma(s-n) \cdot (c_{11}(s) + c_{12}(s))$$

を得る．ここで，

$$\prod_{j=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{s-j}{2}\right) \cdot \gamma(s-n)^{-1} = 2^{n(1-s)} \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \pi^{\frac{n}{2}} \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{s-j+1}{2}\right)^{-1},$$

$$\prod_{j=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{s-j+1}{2}\right)^{-1} \cdot \Gamma\left(\frac{-s+j+1}{2}\right)^{-1} = \prod_{j=0}^{n-1} \pi^{-1} \cdot \sin \pi \left(\frac{s-j+1}{2}\right)$$

に注意すると，

$$c_{11}(s) + c_{12}(s) = (2\pi)^{-ns} \cdot (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2^n \cdot \sin \frac{\pi(s+1)}{2} \cdots \sin \frac{\pi(s-n+2)}{2}.$$

これから $\varepsilon_{ij}(s)$ の結果を使って，$t_{ij}(s)$ の関係にもどすと，

$$e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}sn} \left(t_{11}(s) + e^{-\pi\sqrt{-1}s} t_{12}(s)\right) = (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2^n \cdot \sin \frac{\pi(s+1)}{2} \cdots \sin \frac{\pi(s-n+2)}{2}.$$

$t_{ij}(s)$ が $e^{-2\pi\sqrt{-1}s}$ の多項式であることに注意すると，上の関係式で $s \mapsto s-1$ とすることにより，

$$e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}sn} \left(t_{11}(s) - e^{-\pi\sqrt{-1}s} t_{12}(s)\right) = (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2^n \cdot (\sqrt{-1})^n \sin \frac{\pi s}{2} \cdots \sin \frac{\pi(s-n+1)}{2}.$$

以上をまとめて，

$$t_{11}(s) = e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}sn} \cdot (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2^{n-1} \left\{ \cos\frac{\pi s}{2} \cdots \cos\frac{\pi(s-n+1)}{2} \right.$$
$$\left. + (\sqrt{-1})^n \sin\frac{\pi s}{2} \cdots \sin\frac{\pi(s-n+1)}{2} \right\}$$
$$= t_{22}(s),$$

$$t_{12}(s) = e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}s(n-2)} \cdot (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2^{n-1} \left\{ \cos\frac{\pi s}{2} \cdots \cos\frac{\pi(s-n+1)}{2} \right.$$
$$\left. - (\sqrt{-1})^n \sin\frac{\pi s}{2} \cdots \sin\frac{\pi(s-n+1)}{2} \right\}$$
$$= t_{21}(s)$$

が得られ，(2.1) に現れる量がすべて計算できた．

3 以上の計算を要約・一般化する

以上の計算を一般化してみよう．三つ組 (G, ρ, V) が次の条件を満たしているとする．

(A1) (G, ρ, V) は実数体 $\mathbb{R}$ 上定義された簡約可能概均質ベクトル空間である．

(A2) (G, ρ, V) の既約相対不変式 $P(x)$ は定数倍を除いてただ一つにきまり，$S = \{x \in V\,;\, P(x) = 0\}$ とおくと $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ は単一の $G_{\mathbb{R}}$-軌道である．

(A3) $P(x)$ は multiplicity free，すなわち

$$P(x) = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_d \le n} a_{j_1, \ldots, j_d} x_{j_1} \cdots x_{j_d}$$

という形をしている（ここで，$n = \dim V, d = \deg P$)．

仮定 (A2) から (G, ρ, V) は正則概均質ベクトル空間になる．$P(x)$ の b-関数 $b(s) = \prod_i (s + \alpha_i)$ に対して，$\gamma(s) = \prod_i \Gamma(s + \alpha_i)$ とおく．$V_1 = \{x \in V_{\mathbb{R}}\,;\, P(x) > 0\}$, $V_2 = \{x \in V_{\mathbb{R}}\,;\, P(x) < 0\}$ とすると，$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup V_2$ が $G_{\mathbb{R}}^+$-軌道分解になる．アスタリスク $*$ をつけて双対概均質ベクトル空間に対応するものを表わす．

このとき，概均質ベクトル空間の基本定理より，

$$\int_{V_i^*} |P^*(y)|^{s-\frac{n}{d}} \widehat{f}(y) dy = \gamma(s - \frac{n}{d}) \sum_{j=1}^{2} c_{ij}(s) \cdot \int_{V_j} |P(v)|^{-s} f(v) dv$$

という形の等式が存在する．ただし，

$$c_{ij}(s) = (2\pi)^{-ds} \cdot e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}ds} \cdot \varepsilon_{ij}(s) t_{ij}(s),$$

$\varepsilon_{ij}(s)$ は先程と全く同じで，$t_{ij}(s)$ は $e^{-2\pi\sqrt{-1}s}$ の多項式である．仮定 (A2) より，$c_{11}(s) = c_{22}(s), c_{12}(s) = c_{21}(s)$ が証明できる（(2.2) の ε_0 にあたるものの存在が保証されるので）．さら

に，(2.3) を一般化した積分公式

$$\int_{V_{\mathbb{R}}} |P(x)|^s e^{-\pi \operatorname{tr} {}^t x x} dx = \pi^{-\frac{ds}{2}} \prod_{i=1}^{d} \frac{\Gamma(\frac{s+\alpha_i}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha_i}{2})}$$

が成り立つ（ここで，仮定 (A3) が必要になる．詳細は Igusa [2] を参照)．以上により，前節と同じ計算方法が適用できて，

$$\begin{aligned} t_{11}(s) &= e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}ds} \cdot (2\pi)^{\frac{n-d}{2}} \cdot 2^{d-1} \left\{ \prod_{i=1}^{d} \cos\pi\left(\frac{s+1-\alpha_i}{2}\right) + (\sqrt{-1})^n \prod_{i=1}^{d} \sin\pi\left(\frac{s+1-\alpha_i}{2}\right) \right\} \\ &= t_{22}(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{12}(s) &= e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}s(d-2)} \cdot (2\pi)^{\frac{n-d}{2}} \cdot 2^{d-1} \left\{ \prod_{i=1}^{d} \cos\pi\left(\frac{s+1-\alpha_i}{2}\right) - (\sqrt{-1})^n \prod_{i=1}^{d} \sin\pi\left(\frac{s+1-\alpha_i}{2}\right) \right\} \\ &= t_{21}(s) \end{aligned}$$

が得られる．なお，既約概均質ベクトル空間のうち，仮定 (A1) から (A3) までをみたすものについては，[2] において分類されている．

4 非可換な場合の計算例

$n_2 > n_1 \geq 1$ として，$N = 2n_1 + 2n_2$ とする．$\mathbb{G} = SL_N(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$ とおき，次数づけを

$$\mathfrak{g} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{g}_2 & \mathfrak{g}_3 \\ \hline \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{g}_2 \\ \hline \mathfrak{g}_{-2} & \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 \\ \hline \mathfrak{g}_{-3} & \mathfrak{g}_{-2} & \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}n_1 \\ \}n_2 \\ \}n_2 \\ \}n_1 \end{array}$$

により与える．このとき，

$$(\mathbb{G}_0, \mathfrak{g}_1) \cong (GL(n_1) \times GL(n_2) \times GL(n_2) \mathbin{\dot\times} SL(n_1), M(n_2, n_1) \oplus M(n_2, n_2) \oplus M(n_1, n_2))$$

であり，作用は次のように与えられる．$g = (g_1, g_2, g_3, g_4) \in \mathbb{G}_0, v = (X_1, X_2, X_3) \in \mathfrak{g}_1$ のとき，

$$g \cdot v = \left(g_2 X_1 g_1^{-1},\ g_3 X_2 g_2^{-1},\ g_4 X_3 g_3^{-1}\right).$$

以後，$G := \mathbb{G}_0, V := \mathfrak{g}_1$ とあらわす．

基本相対不変式は 2 つあり，

$$P_1(v) = \det(X_3 X_2 X_1), \qquad P_2(v) = \det X_2.$$

次数はそれぞれ $d_1 = 3n_1, d_2 = n_2$ である．$\underline{d} = (d_1, d_2) = (3n_1, n_2)$ とおく．（このようにして，

以後はアンダーラインをつけることにより多重変数などをあらわす.）$V_{\mathbb{R}}$ の $G_{\mathbb{R}}^{+}$-軌道分解は，

$$
\begin{aligned}
&V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4,\\
&V_1 = \{v \in V_{\mathbb{R}}\,;\ \operatorname{sgn} P_1(v) = +,\ \operatorname{sgn} P_2(v) = +\},\\
&V_2 = \{v \in V_{\mathbb{R}}\,;\ \operatorname{sgn} P_1(v) = +,\ \operatorname{sgn} P_2(v) = -\},\\
&V_3 = \{v \in V_{\mathbb{R}}\,;\ \operatorname{sgn} P_1(v) = -,\ \operatorname{sgn} P_2(v) = +\},\\
&V_4 = \{v \in V_{\mathbb{R}}\,;\ \operatorname{sgn} P_1(v) = -,\ \operatorname{sgn} P_2(v) = -\},
\end{aligned}
$$

により与えられる．特に，(G, V) は正則概均質ベクトル空間になる．なお，どのような分割（今の場合でいえば，$N = n_1 + n_2 + n_2 + n_1$）に対応する概均質ベクトル空間が正則になるかというのは簡単には記述できない（Mortajine [3] を参照).

さて一般に，多変数の場合の基本定理は次のようになる．

$$
\int_{V_i^*} |P^*(v^*)|^{\underline{s}-\underline{\kappa}} \cdot \widehat{f}(v^*) dv^* = \gamma(\underline{s}-\underline{\kappa}) \sum_{j=1}^{l} c_{ij}(\underline{s}) \cdot \int_{V_j} |P(v)|^{-\underline{s}} f(v) dv \qquad (f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})).
$$

但し，

$$
\begin{aligned}
c_{ij}(\underline{s}) &= (2\pi)^{-\underline{d}\cdot\underline{s}} \cdot \exp\left(\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}\underline{d}\cdot\underline{s}\right) \varepsilon_{ij}(\underline{s}) t_{ij}(\underline{s}),\\
\varepsilon_{ij}(\underline{s}) &= \exp\left[-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}\sum_{\nu=1}^{r} s_\nu \cdot (1 - \epsilon_i^*(P_\nu^*)\epsilon_j(P_\nu))\right]
\end{aligned}
$$

である．ここで，$\gamma(\underline{s})$ は b-関数から決まる量，r は基本相対不変式の個数，ϵ_i, ϵ_j^* は符号により ± 1 をとる指標，$t_{ij}(\underline{s})$ は $\exp(-2\pi\sqrt{-1}s_1), \ldots, \exp(-2\pi\sqrt{-1}s_r)$ の多項式である．

我々の例の場合は，$\underline{\kappa} = (n_2, n_2 - n_1)$ であり，b-関数を $P^{\underline{m}}(\partial_v)P^{\underline{s}+\underline{m}}(v) = b_{\underline{m}}(\underline{s})P^{\underline{s}}(v)$ により定義すると，

$$
\begin{aligned}
b_{\underline{m}}(\underline{s}) = &\left\{\prod_{k=1}^{n_1}[s_1+k]_{m_1} \times [s_1+n_2-n_1+k]_{m_1}\right\}\\
&\times \left\{\prod_{k=1}^{n_2-n_1}[s_2+k]_{m_2}\right\} \times \left\{\prod_{k=1}^{n_1}[s_1+s_2+n_2-n_1+k]_{m_1+m_2}\right\}
\end{aligned}
$$

となる（Sugiyama [8] の結果を用いる)．$[*]_m$ という記号は，$[A]_m = A(A+1)\cdots(A+m-1)$ という意味である．すると $\gamma(\underline{s})$ が

$$
\begin{aligned}
\gamma(\underline{s}) = &\left\{\prod_{k=1}^{n_1}\Gamma(s_1+k)\Gamma(s_1+n_2-n_1+k)\right\}\\
&\times \left\{\prod_{k=1}^{n_2-n_1}\Gamma(s_2+k)\right\} \times \left\{\prod_{k=1}^{n_1}\Gamma(s_1+s_2+n_2-n_1+k)\right\}
\end{aligned}
$$

と決まる．$\varepsilon_{ij}(\underline{s})$ は

$$(\varepsilon_{ij}(\underline{s})) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\pi\sqrt{1}s_2} & e^{-\pi\sqrt{1}s_1} & e^{-\pi\sqrt{1}(s_1+s_2)} \\ e^{-\pi\sqrt{1}s_2} & 1 & e^{-\pi\sqrt{1}(s_1+s_2)} & e^{-\pi\sqrt{-1}s_1} \\ e^{-\pi\sqrt{-1}s_1} & e^{-\pi\sqrt{1}(s_1+s_2)} & 1 & e^{-\pi\sqrt{-1}s_2} \\ e^{-\pi\sqrt{1}(s_1+s_2)} & e^{-\pi\sqrt{-1}s_1} & e^{-\pi\sqrt{-1}s_2} & 1 \end{pmatrix}$$

となる．あとは先程と同様に $t_{ij}(\underline{s})$ を計算すればよい．$(C(\underline{s})) = (c_{ij}(\underline{s}))$ とおくと，$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ が単一の $G_{\mathbb{R}}$-軌道であることより，第 2 節と同様の方法で

$$C(\underline{s})\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} C(\underline{s}),$$

$$C(\underline{s})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} C(\underline{s})$$

であることが証明できる．したがって，

$$\begin{aligned} &t_{11}(\underline{s}) = t_{22}(\underline{s}) = t_{33}(\underline{s}) = t_{44}(\underline{s}), \qquad && t_{12}(\underline{s}) = t_{21}(\underline{s}) = t_{34}(\underline{s}) = t_{43}(\underline{s}), \\ &t_{13}(\underline{s}) = t_{24}(\underline{s}) = t_{31}(\underline{s}) = t_{42}(\underline{s}), && t_{14}(\underline{s}) = t_{23}(\underline{s}) = t_{32}(\underline{s}) = t_{41}(\underline{s}) \end{aligned}$$

がわかり，結局，$t_{11}(\underline{s}), t_{12}(\underline{s}), t_{13}(\underline{s}), t_{14}(\underline{s})$ を計算すればよい．さて，Igusa [2] の結果は天野 [1] により一般化されており，それを用いると

$$\begin{aligned} \int_{V_{\mathbb{R}}} |P(v)|^{\underline{s}} \cdot e^{-\pi\,\mathrm{tr}({}^t vv)} dv = \pi^{-\frac{3}{2}n_1 s_1 - \frac{1}{2}n_2 s_2} \times \prod_{k=1}^{n_1} \frac{\Gamma(\frac{s_1+k}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} \times \prod_{k=1}^{n_1} \frac{\Gamma(\frac{s_1+n_2-n_1+k}{2})}{\Gamma(\frac{n_2-n_1+k}{2})} \\ \times \prod_{k=1}^{n_2-n_1} \frac{\Gamma(\frac{s_2+k}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} \times \prod_{k=1}^{n_1} \frac{\Gamma(\frac{s_1+s_2+n_2-n_1+k}{2})}{\Gamma(\frac{n_2-n_1+k}{2})} \end{aligned}$$

と計算できる．そうすると，

$$\begin{aligned} &t_{11}(\underline{s}) + e^{-\pi\sqrt{-1}s_2} t_{12}(\underline{s}) + e^{-\pi\sqrt{-1}s_1} t_{21}(\underline{s}) + e^{-\pi\sqrt{-1}(s_1+s_2)} t_{22}(\underline{s}) \\ &= e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(3n_1 s_1 + n_2 s_2)} \cdot 2^{2n_1+n_2} \cdot (2\pi)^{\frac{1}{2}(2n_1+n_2)(n_2-1)} \times \prod_{k=0}^{n_1-1} \sin\pi\left(\tfrac{s_1-k+1}{2}\right) \sin\pi\left(\tfrac{s_1-n_2+n_1-k+1}{2}\right) \\ &\quad \times \prod_{k=0}^{n_2-n_1-1} \sin\pi\left(\tfrac{s_2-k+1}{2}\right) \times \prod_{k=0}^{n_1-1} \sin\pi\left(\tfrac{s_1+s_2-n_2+n_1-k+1}{2}\right) \end{aligned}$$

となる．この式を①として，

①において，$s_1 \mapsto s_1 - 1$，$s_2 \mapsto s_2$ と変形して得られる式を②，
①において，$s_1 \mapsto s_1$，$s_2 \mapsto s_2 - 1$ と変形して得られる式を③，
①において，$s_1 \mapsto s_1 - 1$，$s_2 \mapsto s_2 - 1$ と変形して得られる式を④，

とすると，4 つの未知の量 $t_{11}(\underline{s}), t_{12}(\underline{s}), t_{13}(\underline{s}), t_{14}(\underline{s})$ に対して 4 つの（独立な）方程式①, $\cdots$, ④があるので $t_{11}(\underline{s}), t_{12}(\underline{s}), t_{13}(\underline{s}), t_{14}(\underline{s})$ が明示的に求まる．

以上の計算方法は，

(A1)' (G, ρ, V) は実数体 $\mathbb{R}$ 上定義された簡約可能概均質ベクトル空間である．

(A2)' (G, ρ, V) の基本相対不変式を $P_1(x), \ldots, P_r(x)$ とし，$S_i = \{x \in V;\ P_i(x) = 0\}$, $S = S_1 \cup \cdots \cup S_r$ とすると，$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ は単一の $G_{\mathbb{R}}$-軌道である．

(A3)' 各 $P_i(x)$ は multiplicity free である．

という条件をみたす (G, ρ, V) に対して適用できる．特殊線形リー環から現れる放物型正則概均質ベクトル空間はすべてこの三つの条件をみたすので，空間が具体的に与えられれば，原理的には計算できる．

参考文献

[1] 天野勝利, 多変数局所関数等式の b-関数による具体的表示, 筑波大学修士論文, 2001, available online.

[2] J. Igusa, On functional equations of complex powers, *Invent. Math.* **85**(1986), 1–29.

[3] A. Mortajine, Classification des espaces préhomogènes de type parabolique réguliers et de leurs invariants relatifs, *Travaux en Cours* **40**(1991), Hermann, Paris.

[4] H. Rubenthaler, Algèbres de Lie et espaces préhomogènes, *Travaux en Cours* **44**(1992), Hermann, Paris.

[5] 佐藤幹夫述, 新谷卓郎記, 概均質ベクトル空間の理論, 数学の歩み **15**, 85–157.

[6] M. Sato and T. Shintani, On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, *Ann. of Math.* **100**(1974), 131–170.

[7] T. Shintani, On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms, *J. Math. Soc. Japan* **24**(1972) , 132–188.

[8] K. Sugiyama, b-Functions associated with quivers of type A, preprint, `arXiv:1005.3596`.